Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

RM
2022-2023

Sauf mention contraire, le corps $\mathbb{K}$ est égale à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans la suite. On prends l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et l'espace mesurée $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans la suite.

1 Théorie de l'intégration de Lebesgue

1.1 Fonctions mesurables

Définition 1 : Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurables si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Remarque 2 : Dans les applications courantes,$Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^d$ et est muni de sa tribu borélienne. On omettra alors couramment de faire figurer celle-ci.

Exemple 3 : • La fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
• Toute fonction constante $f : X \to Y$ est mesurable.
• Toute fonction continue est mesurable.

Proposition 4 : La composée de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable.

Proposition 5 : Soient $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ deux fonction mesurables. Alors pour tout α dans $\mathbb{K}$, on a $\alpha f + g$ et fg mesurable. On en déduit que l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 6 : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
$i)$ $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables.
$ii)$ $\overline{\lim}_n f_n$ et $\underline{\lim}_n f_n$ sont mesurables.
$iii)$ Si $f_n \to f$ (convergence simple), alors f est mesurable.

Définition 7 : Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est étagée si elle est mesurable et ne prends qu'un nombre fini de valeurs. On note $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}) = \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})), f \quad \text{étagée}\}$.

Remarque 8 : On peut écrire une fonction étagée f sous sa forme canonique qui est

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbf{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

Les fonctions étagées jouent dans la construction de l'intégrale de Lebesgue le rôle dévolu aux fonctions en escalier dans la théorie de Riemann.

Théorème (Lemme fondamental d'approximation) 9 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées, telle que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. En outre,
$i)$ Si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ croissante et positive.
$ii)$ Si f est bornée, on peut choisir la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de façon que f_n converge uniformément vers f.

Remarque 10 : Le lemme fondamental d'approximation consiste à approcher une fonction f en découpant régulièrement l'axe des ordonnées, au lieu de celui des abscisses comme les fonction en escaliers pour l'intégrale de Riemann.

1.2 Intégrale de Lebesgue

1.2.1 Des fonctions mesurables positives

Définition 11 : Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+}(X, \mathcal{A})$. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par

$$\int_X f d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Exemple 12 : 1) Soient $\mu = \delta_a$ la mesure de dirac au point $a \in X$ et $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors $\int_X f d\mu = f(a)$.
2) Soit m la mesure de comptage sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Alors si la fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ ne prends qu'un nombre fini de valeurs, on a $\int_X f dm = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \text{card}(\{f = \alpha\})$.

Proposition 13 : Soient f, g deux fonctions étagées positives
$i)$ $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X d\mu$ (additivité).
$ii)$ $f \leq g \Leftrightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ (croissance).
$iii)$ Pour tout $\lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$ (positive homogénéité).

Définition 14 : Soit f une fonction mesurable positive (ie mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}^+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^+))$). On pose alors

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{A}) \right\}.$$

On dit que f est μ-intégrable si $\int_X f d\mu < +\infty$.

Théorème (Convergence monotone ou Beppo Levi) 15 : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions positives mesurables. Alors $f = \lim\limits_{n\to+\infty}$ est mesurable et on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Proposition 16 : On peut étendre les propriétés 13 aux fonctions mesurables positives.

Proposition 17 : Soit f une fonction mesurable positive. Alors

$$\int_X f d\mu \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$$

Remarque 18 : Au lieu de noter $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, on préfère utiliser la forme $f = 0 \quad \mu - p.p$, pour "presque partout".

1.2.2 Des fonctions mesurables réelles

Définition 19 : Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on pose alors $f^+ : X \to [0, +\infty]$ et $f^- : X \to [0, +\infty]$ tels que $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$. On a alors $f = f^+ - f^-$,$|f| = f^+ + f^-$. De plus, f^+ et f^- sont mesurables.
On dit alors que f est μ-intégrable sur X si f^+ et f^- sont μ-intégrable sur X. On a alors

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Proposition 20 : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Alors f est μ-intégrable sur X si et seulement si $|f|$ est μ-intégrable sur X et on a

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

On note alors $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonction intégrables.

Théorème 21 : L'application $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \geq 0$ et est donc croissante.

Remarque 22 : On sait alors intégrer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ car $f = u + iv$. Donc f est intégrable si et seulement si u et v sont intégrable.

1.2.3 Par rapport à l'intégrale de Riemann

Théorème 23 : Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann. On a

$$\int_{[a,b]} f(t) d\lambda(t) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} |f(t)| d\lambda(t) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Remarque/Exemple 24 : Attention, la réciproque est fausse, et c'est d'ailleurs ce qui donne un intérêt à l'intégrale de Lebesgue. Par exemple, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est Lebesgue intégrable mais pas Riemann intégrable.

Théorème 25 : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est continue presque partout sur $[a, b]$.

1.3 Théorèmes de convergence

Théorème (Lemme de Fatou) 26 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de fonctions mesurables positives. Alors on a

$$\int_X \varliminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Théorème (de convergence dominée) 27 : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions complexes mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ telle que

$i)$ Pour μ-presque tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

$ii)$ il existe une fonction positive g, μ-intégrable sur X et telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$

Alors la fonction f (définie $\mu - p.p$) est μ-intégrable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Application 28 : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On a alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)^n dt = 0$ grâce au théorème de convergence dominée.

Théorème 29 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions μ-intégrables sur X telles que la suite numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu$ converge. Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout $x \in X$. De plus, la fonction f (définie $\mu - p.p$) par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est μ-intégrable sur X et on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Théorème (Continuité sous le signe intégrale) 30 : Soit E un espace métrique et $f : E \times X \to \mathbb{C}$ tel que $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$. Soit $x_0 \in E$. On suppose que

$i)$ Pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable.

$ii)$ Pour μ-presque tout $t \in X$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue au point x_0.

$iii)$ Il existe un voisinage V de x_0 inclus dans E et une fonction g μ-intégrale tels que pour tout $x \in V$, on a, pour μ-presque tout $t \in X$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_X f(x,t)d\mu(t)$ est continue en x_0.

Théorème (Dérivabilité sous le signe intégrale) 31 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{C}$. On suppose que

$i)$ Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable et il existe $x_0 \in I$ tel que $t \mapsto f(x_0,t)$ est μ-intégrable sur X.

$ii)$ Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.

$iii)$ Pour tout compact K inclus dans I, il existe une fonction g_K μ-intégrable telle que pour tout $x \in K$, on a, pour μ presque tout $t \in E$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_K(t)$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_X f(x,t)d\mu(t)$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)d\mu(t).$$

1.4 Intégration sur un espace produit

On prends $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espace mesurés avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 σ-finies.

Théorème (de Fubini-Tonelli) 32 : Soit $f : E_1 \times E_2 \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable. Alors :

$i)$ Les applications $y \mapsto f(x,y)$ $\forall x \in E_1$ et $x \mapsto f(x,y)$ $\forall y \in E_2$ sont mesurables. Les applications $x \in E_1 \mapsto \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ et $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$ sont mesurables.

$ii)$ L'intégrale de f par rapport à la mesure produit μ est donnée par

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \otimes E_2} f(x,y)d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)\end{aligned}$$

Théorème (de Fubini) 33 : Soit $f : E_1 \times E_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et tel que f est μ-intégrable. Alors :

$i)$ Pour presque tout $x \in E_1$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est μ_2-intégrable. Pour presque tout $y \in E_2$, l'application $x \mapsto f(,x,y)$ est μ_1-intégrable.

$ii)$ Les applications $y \mapsto \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$ et $x \mapsto \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ sont bien définis presque partout et intégrables respectivement sur E_2 et E_1.

$iii)$ L'intégrale de f par rapport à μ est donnée par

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \times E_2} f(x,y)d(\mu)(x,y) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).\end{aligned}$$

Remarque 34 : La σ-finitude est importante. De plus, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour avoir ceci : si l'une des trois intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{E_1 \times E_2} |f(x,y)|d(\mu)(x,y) \quad I_2 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x,y)|d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$I_3 = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x,y)|d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres. La fonction f est alors μ intégrable et on a le point $iii)$ du théorème de Fubini.

On utilise ceci pour prouver par exemple l'interversion entre une intégrale et une série convergente.

Théorème (Changement de variable) 35 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\phi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$i)$ Si $f : V \to [0,+\infty]$ est mesurable alors

$$\int_V f(v)dv = \int_U f \circ \phi(u)|J_\phi(u)|du.$$

$ii)$ Si $f : V \to \mathbb{C}$ mesurable et $u \mapsto f \circ \phi(u)|J_\phi(u)|$ est intégrable sur U, alors on a l'égalité ci dessus.

Exemple 36 : Pour une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on a comme changement de variable dit coordonnées polaires que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta.$$

Ceci nous permet de retrouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

2 Espace L^p

Définition 37 : Pour $p \in [0,+\infty]$, on désigne par $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des applications f de X dans $\mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On pose $\|f\|_p =$

$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
On note $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable telles que $\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\} < +\infty$.

Proposition 38 : Pour $p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Théorème (Inégalité de Hölder) 39 : Soient $p \in [1,+\infty]$ et q sont conjugué, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$,$g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 40 : Lorsque $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème (Inégalité de Minkowski) 41 : Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Alors

$$\|f+g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Proposition 42 : Soit $p \in [1,+\infty]$. On pose sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu - p.p.$ On pose alors $L^p(\mu) = \mathcal{L}(\mu)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Remarque 43 : Il faut attention au fait que l'on note abusivement de la même manière f dans $\mathcal{L}^p$ et L^p.

Corollaire 44 : Grâce à l'inégalité de Minkowski, on en déduit que $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel normé pour $\|.\|_p$.

Développement (Théorème de Riesz-Fisher) 45 : Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (complet pour la norme $\|.\|_p$). De plus, tout suite qui converge dans L^p admet une sous suite qui converge μ-p.p.

Dev 1

3 Application a la transformée de Fourier

Définition 46 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier (conjuguée) de f l'application notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} f(x)dx.$$

Proposition 47 : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|_u)$.

Théorème (de Rieman-Lebesgue) 48 : On a $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Exemples 49 : Pour $a > 0$: *i)* $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]})(\xi) = \dfrac{\sin \pi a \xi}{\pi \xi}$.
ii) $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$.
iii) $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right)$.
iv) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$.

Définition 50 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes
i) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
ii) f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Exemple 51 : La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 52 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.

Théorème 53 : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et a pour automorphisme réciproque $\tilde{\mathcal{F}}$.

Développement (Théorème de Plancherel) 54 : Avec la convention de transformée de Fourier $e^{-ix\xi}$, L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

Dev 2

Remarque 55 : Dans beaucoup d'autre référence, on montre ce prolongement en partant de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela se passe bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème 52.

Remarque 56 : Par abus de notation, on note encore $\mathcal{F}(f)$ ce prolongement qui définie alors la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Il faut donc faire attention à distinguer la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, mais qui coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.